1. NOT

— Olasılık Teorisi ve Rasgele Süreçler —

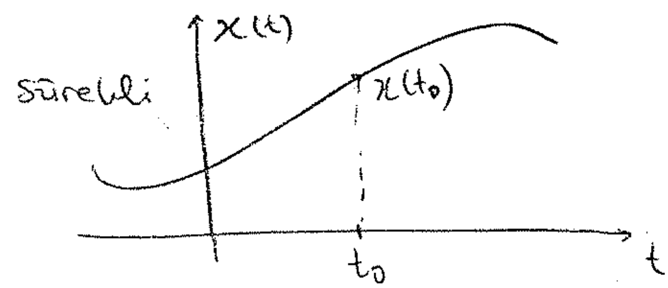
I) Rasgele İşaretler

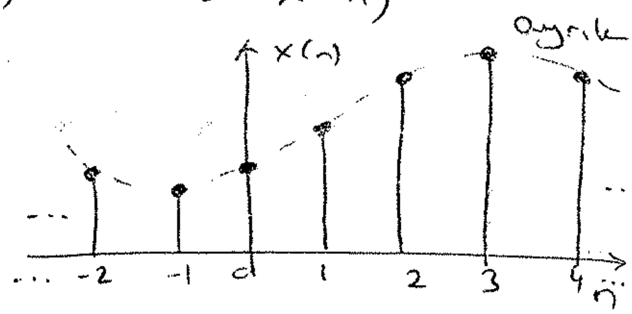
Rasgele işaret bir rasgele sürecin çıktısı olarak gözlenen büyüklüktür. İşaretler genel olarak zaman değişkeninin bir fonksiyonu olarak gösterilirler. İşaret, bir basınç, ağırlık, ses şiddeti, görüntünün aydınlık seviyesi veya bu büyüklüklerin elektriksel bir büyüklüğe dönüştürülmüş hali olabilir. Örnek olarak $x(t)$ bir elektriksel işaret ise, herhagi bir anda, t_0, $x(t_0)$ akım veya gerilim büyüklüğünü gösterecektir. İşaretler, zaman değişkeni açısından iki ana grupta toplanırlar: Sürekli zamanlı işaretler ve ayrık zamanlı işaretler. Zaman değişkeni t, sürekli değerler alıyorsa, yani $t \in \mathbb{R}$ ise $x(t)$ zamanın her t anında tanımlı olacaktır; sürekli zamanlı işaret adını olacaktır. Diğer taraftan zaman değişkeni sadece zamanın belli anlarında değer alıyor ise, yani $n \in \mathbb{Z}$ (tamsayılar kümesi), $x(n)$ ayrık zamanlı işareti veya dizisi sadece tam sayılarda değer alır. Bu anlar dışında tanımsızdır. Bir mikrofon aracılığı ile elektriksel işarete dönüştürülen akustik ses veya müzik işaretleri tüm $t \in \mathbb{R}$ anlarında tanımlı olabilir; yani $x(t)$ sürekli zamanlı bir işarettir.

250000

Diğer taraftan bilgisayar ortamına aktarılan ses işaretleri sadece belli zaman anlarında tanımlıdır, yani ayrık zamanlıdır. Bilgisayar gibi sayısal (dijital) elektronik sistemler sadece ayrık zamanlı işaretleri işleyebilir veya saklayabilirler. Ayrık zamanlı işaretler bazen yapıları gereği $n \in Z$ anlarında tanımlıdır, bazen de sürekli zamanlı bir $x(t)$ işaretinden eşit aralıklarla (T_s sn.) örnek değerler olarak ($x(T_s \cdot n)$) elde edilir. Bu işleme örnekleme denir.

$$x(t) \longrightarrow x(nT_s) \longrightarrow x(n)$$





İşaretler bir fiziksel sistemin (dizgenin) çıktısı olarak düşünüldüğünde de iki ana grupta toplanırlar:

1) Deterministik 2) Stokastik (Rasgele) İşaretler

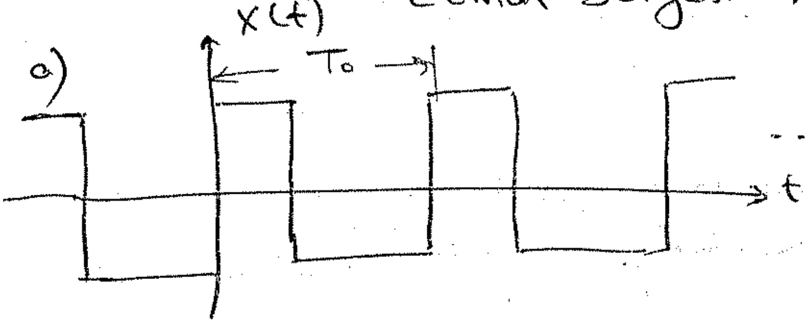
Deterministik işaret, bir matematiksel bağıntı ile tamamen karakterize edilebilen işarettir. Böyle olmayan işaretlere rasgele işaret denir, ve davranışı tamamen olasılık kuralları ile belirlenen bir rasgele sürecin gözlenen bir büyüklüğü olarak düşünülebilir.

Deterministik işaretler iki farklı grupta incelenebilir.

Deterministik işaret $\longrightarrow$ a) Periyodik
b) Periyodik olmayan (aperiodic)

Zaman Bölgesi Analizi

a)



Average value

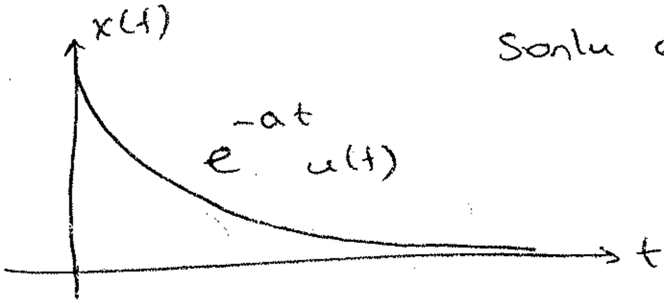
$$A(t) = \langle x(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$

Average power:

$$A(x^2(t)) = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t)\, dt$$

average power in one period

b)



Sonlu enerjili aperiyodik işaretler

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt \quad ; \text{enerji}$$

Frekans Bölgesi Analizi

a) Periyodik bir $x(t)$ işareti, birbiri ile harmonik ilişkili olan komplex sinüsoidal fonksiyonların doğrusal birleşimi olarak ifade edilebilir.

$\{\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}\}$ fonksiyonları $(k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Sonsuz boyutlu ve T_0 s. ile periyodik fonksiyonlar uzayı için bir taban kümesi oluşturur. Bu taban ortonormal bir tabandır;

$$\langle \phi_k(t), \phi_\ell(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \phi_k(t)\, \phi_\ell^*(t)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j\omega_0 (k-\ell)t}\, dt = \delta(k-\ell)$$

$$= \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell \end{cases}$$

Dolayısı ile bu uzayın elemanı olan herhangi bir

T_0 s. ile periyodik $x(t)$ işareti Fourier seri gösterilimi ile

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\phi_k(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

elde edilebilir. Burada ağırlık katsayıları "Fourier seri katsayıları" olup, $x(t)$ işaretinin k. taban elemanı üzerine izdüşümü (iç çarpımı) ile elde edilir:

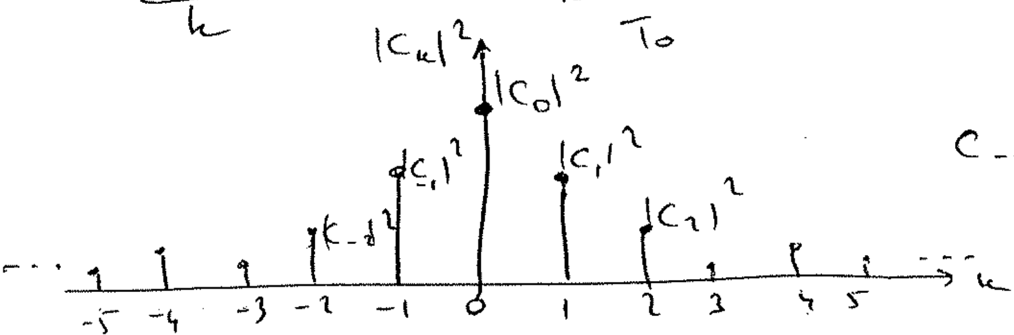
$$c_k=\langle x(t)\,\phi_k(t)\rangle=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

C_0 : DC bileşenin ağırlığı
$C_{\mp 1}$: 1. harmonik (temel)
$C_{\mp 2}$: 2. "

$|C_k|^2$, k. harmoniğin sahip olduğu gücü yani $k.\omega_0$ frekansında işaretin içinde bulunan gücü verir.

C_k, Fourier seri katsayıları, işaret enerjisinin harmonik frekanslara ($k\omega_0=k\dfrac{2\pi}{T_0}$) nasıl dağıldığını gösterir. Hatta buradan periyodik işaretin sadece $k\omega_0$ frekanslarında enerjisi olduğu, bunların dışında hiç enerji taşımadığı görülür. (çizgisel spektrum) Bu enerji dağılımının toplamı, işaretin zamanda hesaplanan toplam gücünü verir:

$$\sum_k |C_k|^2=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt=\langle x^2(t)\rangle$$



$C_{-k}=C_k^*$

b) Periyodik olmayan işaretler için ($T_0 \to \infty$ olarak düşünülebilir) ise harmonik frekanslar birbirine sonsuz küçük mesafede olur; yani $\frac{2\pi}{T_0} \to 0$ $k\omega_0 \to d\omega$. Bu durumda Fourier seri açılımı bir integral dönüşüm haline gelir;

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

Ters Fourier dönüşümü

: işaret sonsuz sayıda ağırlıklı komplex sinüsoidallerin toplamı olarak yazılabilir.

Bu sinüsoidallerin her biri $-\infty < \omega < \infty$ frekanslarına sahiptir. Ağırlık katsayıları daha önce olduğu gibi izdüşüm ile bulunur ve <u>Fourier Dönüşümü</u> adını alır.

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}\,,$$

işaret içinde ω frekanslı sinüsoidalin katkısını ölçer.

Ayrıca $|X(\omega)|^2$ işaret enerjisinin tüm frekanslara nasıl dağıldığını gösterir, dolayısı ile <u>Enerji yoğunluk fonksiyonu</u> denir.

- $\int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega = \{ [\omega_1 - \omega_2]$ bandındaki enerji $\}$
- $|X(\omega)|^2 \geq 0$ daima pozitif
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$ ✓

dolayısı ile $|X(\omega)|^2$ işaretin enerji dağılım fonksiyonu olarak kullanılır.

2) Stokastik İşaretler: Yukarıdaki frekans domeni tanımları sadece deterministik işaretler için geçerlidir. Bir rasgele işaretin "Güç Spektrumu" ya da Güç Yoğunluk Spektrumu, işaretin istatistikleri ile elde edilir.

Zaman Domeni tanımları:

$$A\{x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt = \langle x(t) \rangle \quad \text{ortalama değer}$$

$$A\{x^2(t)\} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt = \langle x^2(t) \rangle \quad \text{ortalama güç}$$

$$A\{x(t)\, x(t+\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \int_{T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle \quad \text{ise}$$

$x(t)$ sürecinin autocorrelation (özilinti) fonksiyonudur. $R(t,\tau)$. Eğer bu sürecin ortalaması zamandan bağımsız ise $\Rightarrow$ $\langle x(t) \rangle = \overline{x(t)} = C$: 1. derece durağan

eğer $R(t,\tau) = R(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle = f(\tau)$: 2. derece durağan

$\Rightarrow$ bu sürece Wide Sense Stationary WSS denir.

WSS süreçlerin özilinti fonksiyonu (autocorrelation)

1) $R(\tau)$ çift simetrik
2) $R(0) \geq R(\tau)$ $\forall \tau$, $R(0)$ maksimum değer
3) monoton olarak azalan bir fonksiyon $\tau \to \infty$
4) $\mathcal{F}\{R(\tau)\} \geq 0$ $R(\tau)$'nun Fourier dönüşümü daima pozitif olmalı

<u>Güç Yoğunluk Spektrumu</u>: WSS bir sürece ait özilinti fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \mathcal{F}[R(\tau)] \quad : \text{PSD}$$

Einstein – Wiener – Khintchine teoremi

1) $S(\omega) \geq 0$, $\quad S_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, d\tau$, $\quad R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int S_x(\omega)\, d\omega$

2) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, dw = \langle x^2(t) \rangle = R(0) = E_x$$

3) $$\int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega)\, dw = [\omega_1 - \omega_2] \text{ bandındaki enerji miktarı}$$

— Doğrusal, Zamanla-Değişmeyen Sistem Kavramı —

$$x(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(t) = T[x(t)] \qquad \text{LTI}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \end{array}\right\} \text{ eğer } a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \longrightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

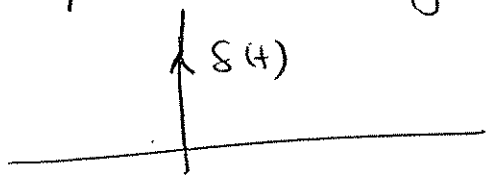
lineerlik

eğer $x(t) \longrightarrow y(t)$ ve $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$ zamanla değişmeme

Dolayısı ile $\quad x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$ öyle ki,

herhangi bir $x(t)$ işareti ötelenmiş ve uygun sayılar ile ölçeklenmiş impuls fonksiyonlarının toplamı olarak gösterilebilir:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

Şimdi bir LTI sisteme $\delta(t)$ uygulandığında elde edilen çıkışa $h(t)$ <u>impuls cevabı</u> diyelim.

$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau) \quad \text{(zamanla değişmeyen)}$$

$$x(\tau)\,\delta(t-\tau) \longrightarrow x(\tau)\,h(t-\tau) \quad \text{(homojenlik, ölçekleme)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = x(t) * h(t)$$

$$\underset{\text{giriş}}{x(t)} \longrightarrow \underset{\text{çıkış}}{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

— Rasgele İşaretler ve LTI Sistemler —

$$\underset{R_x(\tau)}{x(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)\,h(t-\xi)\,d\xi$$

$R_y(\tau) = ?$ çıkış işaretinin özilintisi ?

$$R_y(\tau) = \langle y(t)\,y(t-\tau)\rangle = \left\langle \int h(\xi)\,x(t-\xi)\,d\xi \int h(\eta)\,x(t-\tau-\eta)\,d\eta \right\rangle$$

$$= \iint h(\xi)\,h(\eta)\,\underbrace{\langle x(t-\xi)\,x(t-\tau-\eta)\rangle}_{R_x(\tau+\eta-\xi)}\,d\xi\,d\eta$$

$$S_y(\omega) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \iint h(\xi)\,h(\eta)\,R_x(\tau+\eta-\xi)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau+\eta-\xi)\,e^{-j\omega(\tau+\eta-\xi)}\,d\tau}_{S_x(\omega)} \; \underbrace{\int h(\xi)\,e^{-j\omega\xi}\,d\xi}_{H(\omega)} \; \underbrace{\int h(\eta)\,e^{j\omega\eta}\,d\eta}_{H^*(\omega)}$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\,|H(\omega)|^2$$

LTI sistemin çıkışının PSD'si girişin PSD'si ile sistemin frekans cevabının modül karesinin çarpımıdır

<u>Kovaryans</u>: Bir rasgele sürecin kovaryansı, ortalama değeri içinden çıkarıldıktan sonra hesaplanan özilinti fonk.

$$C_x(\tau) = \langle [x(t) - \overline{x(t)}][x(t-\tau) - \overline{x(t-\tau)}] \rangle$$

Çapraz ilinti ve çapraz kovaryans: Farklı iki işaretin noktaları arasındaki ilişkinin ölçüsüdür.

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t)\, y(t-\tau) \rangle \quad \text{çapraz ilinti}$$

$$C_{xy}(\tau) = \langle [x(t) - \overline{x}(t)][y(t-\tau) - \overline{y(t-\tau)}] \rangle \quad \text{çapraz kovaryans}$$

İlintisiz Süreçler: $x(t)$ ve $y(t)$ süreçleri arasındaki çapraz ilinti fonksiyonu $R_{xy}(\tau) = 0 \ \forall \tau \Rightarrow$ $x(t)$ ve $y(t)$ ilintisizdir denir. (uncorrelated)

<u>Örnek</u>: $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ iki işaretin toplamı

$$R_y(\tau) = \langle y(t)\, y(t-\tau) \rangle = \langle [x_1(t) + x_2(t)][x_1(t-\tau) + x_2(t-\tau)] \rangle$$

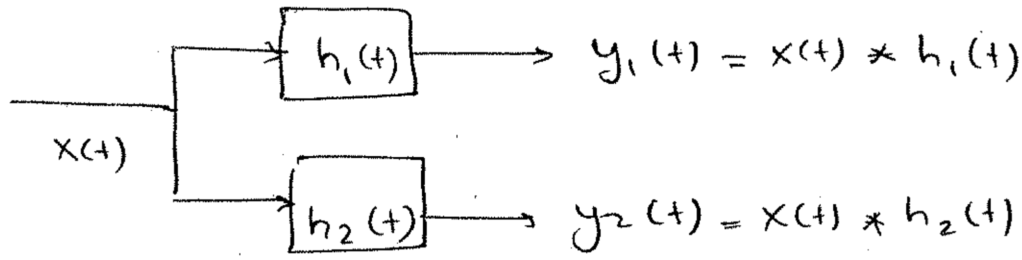
$$= \langle x_1(t)\, x_1(t-\tau) \rangle + \langle x_1(t)\, x_2(t-\tau) \rangle + \langle x_2(t)\, x_1(t-\tau) \rangle + \langle x_2(t)\, x_2(t-\tau) \rangle$$

$$= R_{x_1}(\tau) + \underbrace{R_{x_1x_2}(\tau) + R_{x_2x_1}(\tau)}_{\text{çapraz ilintiler}} + R_{x_2}(\tau)$$

$$R_{x_1x_2}(\tau) \neq R_{x_1x_2}(-\tau) \quad \text{(çift değildir)}$$

$$S_y(\omega) = S_{x_1}(\omega) + S_{x_2}(\omega) + \underbrace{S_{x_1x_2}(\omega) + S_{x_2x_1}(\omega)}_{\text{Çapraz Spectrumlar}}$$

Ödev 1:



$R_{y_1}(\tau)$, $R_{y_2}(\tau)$, $R_{xy_1}(\tau)$, $R_{xy_2}(\tau)$, $R_{y_1y_2}(\tau)$, $S_{y_1y_2}(\omega)$ nedir, bulunuz.

Varyans (Değişinti): Kovaryansın $\tau = 0$'da aldığı değere $C_x(0) = \sigma_x^2$ varyans denir. (σ_x : standart sapma)

$$C_x(0) = \sigma_x^2 = \left\langle \left[x(t) - \langle x(t) \rangle \right]^2 \right\rangle$$
$$= \left\langle x(t)^2 - 2x(t)\langle x(t)\rangle + \langle x(t)\rangle^2 \right\rangle$$
$$= \langle x^2(t)\rangle - 2\langle x(t)\rangle\langle x(t)\rangle + \langle x(t)\rangle^2$$
$$= \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2$$
$$= \underbrace{R_x(0)}_{\text{toplam güç}} - \underbrace{\overline{x(t)}^2}_{\text{DC güç}} \quad : \text{toplam AC güç}$$

Eğer $x(t)$ prosesinin ortalama değeri sıfır ise $\Rightarrow$

$\overline{x(t)} = 0 \Rightarrow \sigma_x^2 = R_x(0) = \langle x^2(t)\rangle = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle\big|_{\tau=0}$

Önemli Kavramlar:

$\langle x(t)\rangle = \overline{x(t)}$ ortalama değer

$\langle x^2(t)\rangle = R_x(0)$ ortalama güç (özilintinin $\tau = 0$ değeri)

$R_x(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle$ özilinti fonksiyonu

$C_x(\tau) = \left\langle \left[x(t) - \overline{x}(t)\right]\left[x(t+\tau) - \overline{x(t+\tau)}\right]\right\rangle$ öz kovaryans

$C_x(0) = \sigma_x^2 = \left\langle \left[x(t) - \overline{x}(t)\right]^2 \right\rangle = \langle x^2(t)\rangle - \overline{x(t)}^2$ varyans

$= R_x(0) - \overline{x(t)}^2$ (AC güç)

— Ayrık Zamanlı Rasgele Süreçler —

$\{x(n)\}$ ayrık zamanlı rasgele bir süreç.

$$\langle x(n)\rangle = A\{x(n)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$ ortalama değer

$$R_x(k) = A\{x(n)\, x(n+k)\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, x(n+k)$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k)\, e^{-j\omega k}$$: ayrık zamanlı fourier dönüşü

: $x(n)$'in güç spektrum yoğun

PSD

$$R_x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\, e^{j\omega k}\, d\omega$$ öz ilinti fonk. $\xleftrightarrow{F}$ PSD

$$R_x(0) = \langle x^2(n)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\omega})\, d\omega$$ average güç.

Ayrık-Zamanlı, Doğrusal, Zamanla-Değişmeyen Sistemler

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

herhangi bir ayrık zamanlı $x(n)$ işareti, ötelenmiş ve ölçeklenmiş impuls işaretlerinin doğrusal birleşimi olarak ifade edilebilir:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, \delta(n-k).$$

$\delta(n) \longrightarrow h(n)$ sistemin impulsa verdiği cevap (impuls cevabı)

$\delta(n-k) \longrightarrow h(n-k)$ zamanla değişmeme

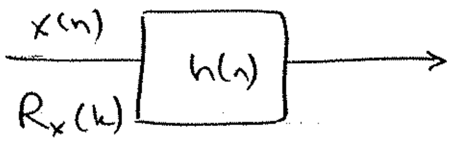
$x(k)\,\delta(n-k) \longrightarrow x(k)\, h(n-k)$ sabitle çarpma

$\sum_k x(k)\,\delta(n-k) = x(n) \longrightarrow \sum_k x(k)\, h(n-k) = y(n)$ lineer

$$y(n) = \sum_k x(k)\, h(n-k) = \sum_k x(n-k)\, h(k) = x(n) * h(n)$$

konvolüsyon

Rasgele bir $x(n)$ işareti, impuls cevabı $h(n)$ olan bir LTI sisteme uygulansın.



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)\, h(k)$$

$$R_y(k) = ?$$

$$R_y(k) = \langle y(n)\, y(n+k) \rangle = \Big\langle \overbrace{\sum_{\ell} h(\ell)\, x(n-\ell)}^{y(n)} \overbrace{\sum_{m} h(m)\, x(n+k-m)}^{y(n+k)} \Big\rangle$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{m} h(\ell)\, h(m)\, \underbrace{\langle x(n-\ell)\, x(n+k-m) \rangle}_{x\text{'in özilinti fonk.}}$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{m} h(\ell)\, h(m)\, R_x(k-m+\ell)$$

$$S_y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{R_y(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_y(k)\, e^{-j\omega k}$$

{ çıkışın PSD
ayrık zamanlı
Fourier trans.

$$= \sum_{k} \sum_{\ell} \sum_{m} h(\ell)\, h(m)\, R_x(k-m+\ell)\, e^{-j\omega k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k} R_x(k-m+\ell)\, e^{-j\omega(k-m+\ell)}}_{S_x(e^{j\omega})} \underbrace{\sum_{\ell} h(\ell)\, e^{+j\omega\ell}}_{H^*(e^{j\omega})} \underbrace{\sum_{m} h(m)\, e^{-j\omega m}}_{H(e^{j\omega})}$$

$$= S_x(e^{j\omega})\, |H(e^{j\omega})|^2 \qquad (\text{çıkışın PSD si})$$

burada impuls cevabı $h(n)$'in Fourier dönüşümü sistemin frekans cevabı $H(e^{j\omega})$ olarak tanımlanır.

—— o ——

— Rasgele Sürecin Türevleri —

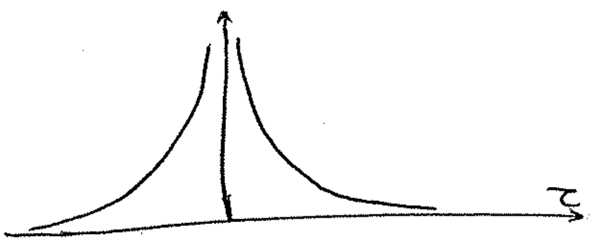
Bir rasgele sürecin türevlenebilir olması için, sürecin özilinti fonksiyonu $\tau = 0$ da sürekli ve türevli olmalı

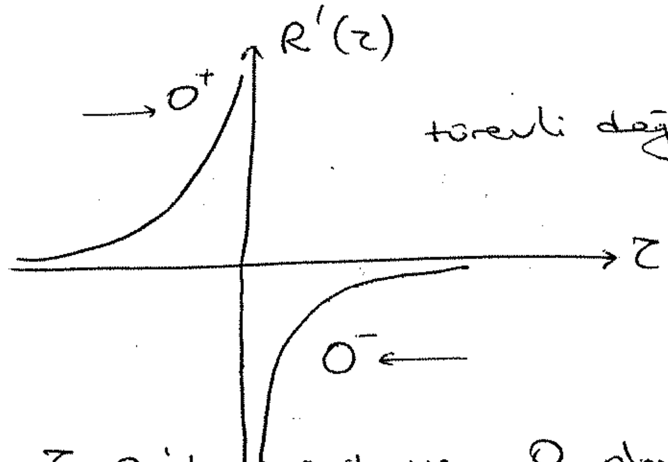
$$\left.\frac{dR(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left. R'(\tau)\right|_{\tau=0} = R'(0) = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

$$y(t) = x'(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \Rightarrow \langle y^2(t) \rangle = A\left\{\left[\lim_{\Delta \to 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta)}{\Delta}\right]^2\right\}$$

Eğer $R'(0^+) \neq R'(0^-) \Rightarrow \langle y^2(t) \rangle \to \infty$ ve süreç türevli değildir denir. Örneğin Markov süreç

$$R_x(\tau) = R(0)\, e^{-\alpha|\tau|}$$





(Sağdan ve soldan türevler $\tau = 0$'da eşit ve 0 olmalı)

Bir $\{x(t)\}$ sürecinin türevleri arasındaki öz ilinti fonk.

$$R_{jk}(\tau) = \left\langle \frac{\partial^j x(t)}{\partial t^j}, \frac{\partial^k x(t+\tau)}{\partial t^k} \right\rangle \quad \text{ve} \quad R_{00}(\tau) = R_x(\tau)$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^{(j)}(t)\; x^{(k)}(t+\tau)\, dt = (-1)^j \frac{d^{(j+k)}}{dt^{(j+k)}} R_x(\tau)$$

— $R_{11}(\tau) = \langle x'(t)\; x'(t+\tau) \rangle = (-1)^1 \dfrac{d^2}{dt^2} R_x(\tau)$

— $R_{01}(\tau) = \langle x(t)\; x'(t+\tau) \rangle = (-1)^0 \dfrac{d}{dt} R_x(\tau)$ process ile, 1. türevinin çapraz ilişkisi

— $R_{01}(0) = 0$

— OLASILIK TEORİSİ —

Deney: Sonucu rasgele değişen ve aynı koşullar altında tekrarlanan çalışmalar. (experiment)

Çıktı (outcome) : deneyin mümkün olan tüm sonuçları

Örnek Uzayı (sample space): bir deneyin olası tüm çıktılarının oluşturduğu uzaya S örnek uzayı denir. Deneylerin farklı herbir çıktısı bu uzayın bir noktasıdır.

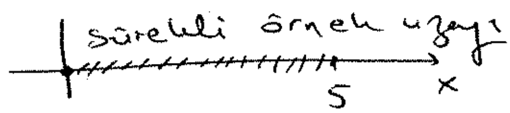
Bir örnek uzayın elemanları sayılabilir ise bu uzaya "ayrık örnek uzay", aksi halde sürekli örnek uzay denir.

Örnek: Üzerinde 1–50 arasında sayılar yazılı olan 50 adet top bir torbaya konup, top çekiliyor.

$S = \{1, 2, \ldots 50\}$ ayrık örnek uzay.

Örnek: 0 ile 5 arasında rasgele bir sayı seçiniz!

$S = \{x : 0 \leq x \leq 5\} = [0, 5]$



Olay: (event) Bir deney sonucunda sadece belli bir çıktı ile değil, bu çıktının bazı koşulları sağlaması ile de ilgilenilebilir. Yani örnek uzay içinde belli koşulları sağlayan (ortak özelliği olan) noktaların oluşturduğu alt kümeye bir "olay" denir.

Örnek: Bir elektriksel işaretin voltajı ölçülüyor: $x(t)$, t anındaki voltaj olsun; $S = \{x(t) : -\infty < x(t) < \infty\}$ sürekli örnek uzayı. Bu uzayda çıktının yani voltajın negatif olması sonucuna bir olay denir.

$A = \{ \varphi : -\infty < x(t) \leq 0 \}$ $A \subset S$, alt kümesidir

Olaylar küme işlemleri ile birleştirilebilirler. Bir deney yapıldığında, herhangi bir olayın oluşma olasılığı "Probability" olasılık olarak adlandırılır.

E rasgele bir deney ve S bu deneyin örnek uzayı olsun. E deneyi için herbir A olayına P(A) şeklinde A'nın olasılığı adı verilen bir sayı atayan kurala olasılık kanunu denir.

Aksiyomlar
I) $P[A] \geq 0$ olasılık pozitif bir sayı
II) $P[S] = 1$ kesin olay
III) Eğer A ve B kesişimi olmayan altkümeler ise $A \cap B = \emptyset \Rightarrow$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B].$$

$A_1, A_2, \ldots$ olaylar dizisi için $A_j \cap A_i = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$$

— Bağıl Frekans —

Çıktısında A, B, ... N olaylarını gözlediğimiz bir deneyi n kez tekrarlayalım.

n_A : A olayının oluşma sayısı

$n_A + n_B + \cdots + n_N = n$ toplam deney sayısı

$$\frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} + \cdots + \frac{n_N}{n} = 1$$

$\frac{n_A}{n}$: A olayının (relative) bağıl frekansı

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$: A olayının olasılığı

Özellikler

1) $0 \leq P(A) \leq 1$ herhangi bir A olayı için

2) $P(\Omega) = 1 \Rightarrow$ Ω kesin olay

3) $P(\emptyset) = 0 \Rightarrow$ $\emptyset$ boş küme

4) Kesişimi olabilen iki A, B olayını gözönüne al

$A \cap B = AB$ hem A, hem B olayı birlikte oluştu

$A \cup B =$ A veya B, veya her ikisi birlikte oluştu

Sadece A n_1 kez, sadece B n_2 kez, AB birlikte n_3 kez ve ne A ne de B $(A \cup B)'$ n_4 kez.

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$$

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{n_1 + n_3}{n} \qquad P(B) = \frac{n_B}{n} = \frac{n_2 + n_3}{n}$$

$$P(AB) = \frac{n_{AB}}{n} = \frac{n_3}{n}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n} = \frac{n_1 + n_3}{n} + \frac{n_2 + n_3}{n} - \frac{n_3}{n}$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

$$= \frac{n - n_4}{n} = 1 - P((A \cup B)')$$

5) Koşullu olasılık: B olayı oluşmuş iken A olayının da oluşma olasılığı

$$P(A \setminus B) = P_B(A) = \frac{n_3}{n_2 + n_3} = \frac{n_3 / n}{(n_2 + n_3)/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B \setminus A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

6) Eğer iki olayın birlikte oluşma olasılığı

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ ise A ve B olaylarına

"istatistiksel bağımsız" olaylar denir. Böylece

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B \backslash A) = P(B)$$

7) Karşılıklı olarak istatistiksel bağımsız olan N olay

$P(A_i\, A_j) = P(A_i\, A_j)$

$P(A_i\, A_j\, A_k) = P(A_i)\,P(A_j)\,P(A_k)$ ve ...

8) $H_1, H_2, \ldots H_N$ bazı olaylar ve $H_i \cap H_j = \emptyset$ ayrık olaylar olsun.

$$P(A \backslash H_k)\,P(H_k) = P(H_k \backslash A)\,P(A) = P(A \cap H_k)$$

Bayes Kuralı $\quad P(H_k \backslash A) = \dfrac{P(A \backslash H_k)\,P(H_k)}{P(A)}$

(koşullu olasılık ile öz olasılık arasındaki bağlantı)

Rasgele Değişken

S : örnek uzayı (olası tüm çıktıların kümesi)

ω : S içindeki noktalar

P : olasılık kanunu (sonlu, toplanabilir : FAPM)

$\mathcal{F}$: σ - cebir

Bir olasılık uzayı $\{S, \mathcal{F}, P\}$ tanımlansın. Bir reel - değerli fonksiyon $X(\omega)$ eğer $\forall a$,

$\{\omega \backslash X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ bu uzayın elemanı ise

$X(\omega)$ bir rasgele değişkendir, yani

$X(\omega) : S \longrightarrow \mathbb{R}$ örnek uzayının elemanlarını reel sayıya götüren bir fonk.

$P(\omega \mid X(\omega) \leq a)$ tanımlı, reel olmalıdır. (örnek uzaydaki herbir ω noktası için $P(X(\omega) \leq a)$ olasılığı tanımlı ise $X(\omega)$ bir rasgele değişkendir)

— Olasılık Dağılım Fonksiyonu (Cumulative Distribution Func.)

$F(x) = P(X(\omega) \leq x)$ fonksiyonuna CDF denir

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (x'in $-\infty$ dan küçük olma olasılığı 0)

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ (x'in ∞ dan küçük olma olasılığı 1) kesin doğ

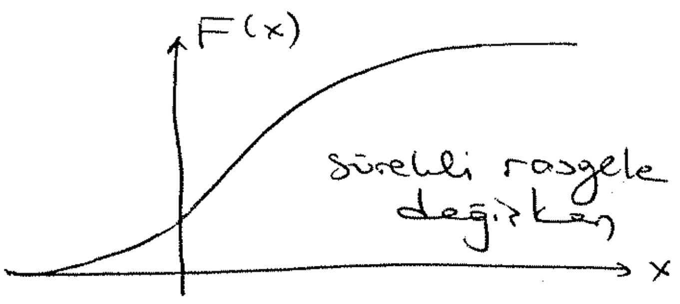
3) $F(x)$, x'in monoton ve azalmayan bir fonksiyonudur.

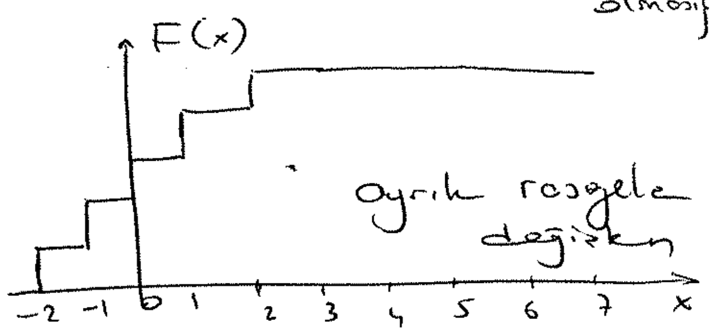
$P(X(\omega) \leq a) = P((-\infty, a]) = P\{x$ rasgele değişkeninin a dan küçük olması$\}$

$= F(a) - F(-\infty)$

$= F(a)$

$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = P\{x$ in $(a,b]$ aralığında olması$\}$





— Olasılık Yoğunluk Fonk. (Prob. Density Function) PDF —

Sürekli rasgele değişkenler için CDF'in değişim hızı

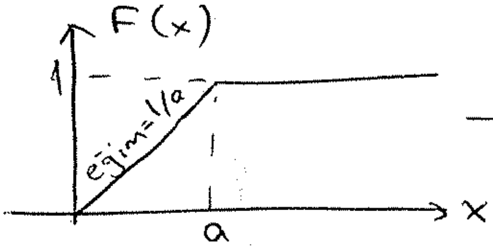
$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ 'e PDF denir.

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

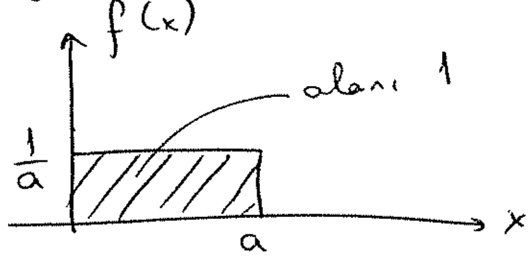
2) $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - \cancel{F(-\infty)}^{0} = F(a)$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

Örnek: x sürekli rasgele değişkeni için



$\longrightarrow \dfrac{d}{dx} \longrightarrow$



İstatistik Ortalamalar

1) Ortalama değer (beklenen değer)

$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$; x sürekli rasgele değişken

ayrık rasgele değişkenler için PDF yerine olasılık kullanılır. x_i rasgele değişkeni için p_i : x_i nin olasılığı. $\Rightarrow$

$E[x] = \sum_i x_i\, p_i$, x; ayrık rasgele değişken

Örnek: Zar atma deneyi yapılıyor. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p_i = \frac{1}{6} \quad 1 \leq i \leq 6$

$E[x] = \sum_{i=1}^{6} x_i\, p_i = \frac{1}{6}\{1+2+3+4+5+6\}$

$E[x^2] = \sum_{i=1}^{6} x_i^2\, p_i = \frac{1}{6}\{1+4+9+16+25+36\}$

2) Momentler: ortalama değer etrafında r. moment

$\mu_r = E[(x-m_x)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^r f(x)\,dx$

burada $m_x = E[x]$

$$\mu_2 = Var(x) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)\,dx \quad : \quad x \text{ in varyansı}$$

– Sıfır etrafında r. moment

$$\mu^r = E[x^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx$$

$$\mu^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \quad : \quad x\text{'in karesel ortalaması (ortalama gücü)}$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\,m_x + m_x^2) f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x^2\,dx} - 2m_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}_{m_x} + m_x^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{1}$$

$$= \mu^2 - 2m_x^2 + m_x^2$$

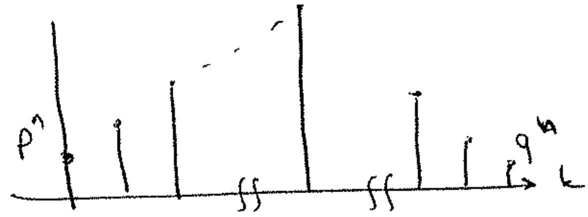
$$= \mu^2 - m_x^2 \quad : \quad \text{varyans} = \text{toplam güç} - \text{dc güç}$$

– Ayrık Rasgele Değişken Örnekleri –

1) Binom dağılımı : bağımsız deneyler, sadece 2 çıktı var; f, s ve bunların olasılıkları sabit, $P(f)=q$, $P(s)=p$ $\quad p+q=1$. n deneyde k kez s gelmesi olasılığı

$$b(k;\,n,p) = \binom{n}{k} p^k \underbrace{(1-p)}_{q}{}^{n-k} \quad \text{ve buradа}$$

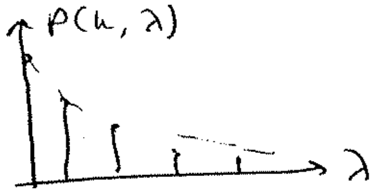
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$



$$\sum_{k=0}^{n} b(k;\,n,p) = 1$$

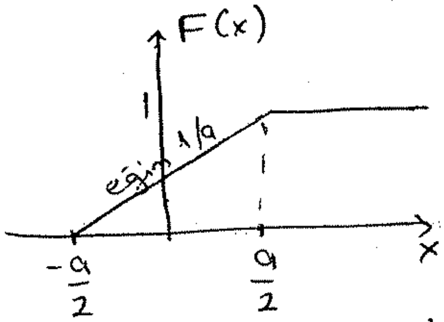
2) Poisson dağılımı : $P(k,\lambda) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad 0 \le k \le n$

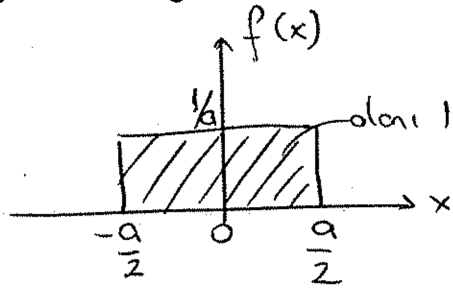
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k,\lambda) = e^{-\lambda} \underbrace{\left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \cdots\right]}_{e^{\lambda}} = 1$$



— Sürekli Rasgele Değişken Örnekleri —

1) Uniform (düzgün) dağılım:



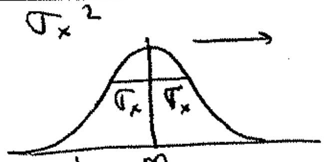


$$m_x = E[x] = \int_{-a/2}^{a/2} x\, f(x)\, dx = \int_{-a/2}^{a/2} x \frac{1}{a}\, dx = \frac{1}{a} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-a/2}^{a/2} = 0$$

$$\sigma_x^2 = E[(x-\underset{0}{\underset{\downarrow}{m_x}})^2] = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{1}{a}\, dx = \frac{1}{a} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{3a}\left[\frac{a^3}{4}\right] = \frac{a^2}{12}$$

2) Gauss (Normal) Dağılım:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}} \longrightarrow \quad x \sim N(m_x, \sigma_x^2)$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

= Haberleşme sistemlerinde birçok işaret (informasyon kaynağı, gürültü, vs) Gauss dağılımlı olarak modellenir (kabul edilir). Bu durumlarda çeşitli hesaplar yapılırken (hata olasılığı gibi) Gauss pdf'in integralini almak gerekebilir. (altında kalan alan = olasılık):

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right\} dx \qquad \frac{x-m}{\sigma} = t$$

$$dx = \sigma\, dt$$

$$\int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \int_{\frac{b-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$= Q\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

$$\int_a^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{N(0,1)} dx = Q(a)$$

standart hata fonksiyonu: erf

Ödev: Gauss dağılımına sahip bir x rasgele değişkanının ortalama değerini $\bar{x} = E[x]$, ve varyansını $E[(x-\bar{x})^2]$, bulunuz.

Birleşik Dağılım ve Yoğunluk Fonksiyonu

İki veya daha fazla rasgele değişken birlikte gözlenebilir. Buna göre $x_1, x_2, \ldots x_n$ rasgele değişkenlerinin olasılık dağılım fonksiyonu CDF,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Prob(X_1(\omega) \leq x_1, X_2(\omega) \leq x_2, \ldots X_n(\omega) \leq x_n)$$

$n=2$ için $F(x_1, x_2)$'ye iki değişkenli (bivariate) CDF denir. $[x_1, x_2, \ldots x_n] = \underset{\sim}{x}$ vektörü için

1) $F(\underset{\sim}{x})$ monoton artan bir fonksiyondur.

2) herhangi bir $x_i \rightarrow -\infty$, $F(\underset{\sim}{x}) = 0$

3) herhangi bir $x_i \rightarrow \infty$, $F(\underset{\sim}{x}) = 1$

Tamamen sürekli rasgele değişkenler için

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} F(\underset{\sim}{x}) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$: çok değişkenli PDF ve

$$F(a_1, a_2, \ldots a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} f(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x}$$

1) $f(\underset{\sim}{x}) \geq 0 \quad \forall x$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x} = 1$$: PDF'in altındaki hacim

— Ayrık Rasgele Değişkenlerde Birleşik Olasılık Yoğunluk Fonk

$p(x_1, x_2, \dots x_n) = p(\underset{\sim}{x})$ birleşik olasılık yoğ. fonk. olarak kullanılır.

CDF ise $F(a_1, a_2, \dots a_n) = \sum_{x_1 \le a_1} \sum_{x_2 \le a_2} \cdots \sum_{x_n \le a_n} p(\underset{\sim}{x})$

— Marjinal (Kenar) Yoğunluk Fonksiyonları —

n rasgele değişkenin birleşik PDF'i verilmiş olsun:

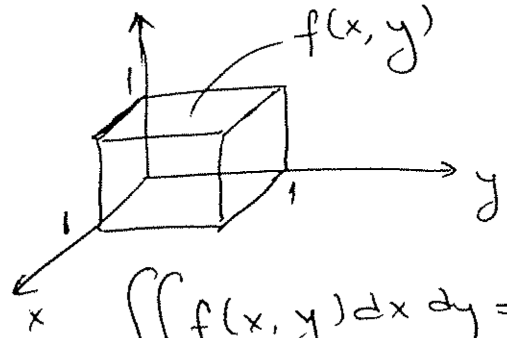
x_1'in marjinal yoğunluk fonksiyonu,

$$f_1(x_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} f(\underset{\sim}{x})\, dx_2\, dx_3 \dots dx_n$$

Örnekler:

1) Bivariate Uniform Dağılım

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases}$$



$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

2) Bivariate Gaussian (Normal) Dağılım.

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 2\pi}\sqrt{2\pi\sigma_y^2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2 \right] \right\}$$

ρ: correlation coefficient (korelasyon katsayısı)

$-1 < \rho < 1$, $\rho = 0 \Rightarrow x$ ve y uncorrelated (ilintisiz)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Marjinal yoğunluklar : $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2}$$ x 'in kenar yoğunluğu ve o da tek değişkenli bir Gaus

$$f_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_y^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2}$$ bu da bir Gau

<u>Ödev</u> : 2 değişkenli Gauss dağılımın kenar yoğunlukları da tek değişkenli birer Gauss dağılımdır; ispatlayınız.

— Koşullu Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu —

Olasılık yoğunluk fonksiyonu, olasılığın tüm özelliklerini taşır. Buna göre birleşik PDF gibi, koşullu PDF de tanımlanabilir:

Ayrık rasgele değişkenlerde;

$p(x)$: x in olasılığı (ve pdf'i)

$p(x,y)$: x ve y'nin birleşik olasılığı (ve birleşik pdf:

$P_i(x) = \sum_j p(x, y_j)$: marjinal olasılık (marjinal pdf)

$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$: y oluşmuş iken x 'in de oluşma olasılığı (pdf'i)

Sürekli rasgele değişkenlerde;

$F(x) = Prob\ (X(\omega) \leq x)$ CDF

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ PDF

$F(x,y) = \text{Prob}(X_1(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y)$: joint CDF

$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$: joint PDF

$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$: marjinal PDF

$F(y \backslash x) = \lim_{\Delta x \to 0} \text{Prob}\left(Y \leq y \backslash \frac{x - \Delta x}{2} < X \leq \frac{x + \Delta x}{2} \right)$

: koşullu CDF

$f(y \backslash x) = \frac{\partial}{\partial y} F(y \backslash x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$: koşullu PDF.

Tanım: x ve y rasgele değişkenlerinin birleşik pdf'i:

$f(x,y) = f_1(x)\, f_1(y)$ dolayısı ile $f(y \backslash x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = f_1(y)$

ise x ve y istatistiksel bağımsızdır, ve istatistiksel bağımsız olan rasgele değişkenler uncorrelated (ilintisiz)'dir.

Tanım: Birleşik Gaussian olan x ve y rasgele değişkenleri eğer ilintisiz ise $(\rho = 0) \Rightarrow$ x ve y ayrıca istatistiksel bağımsızdır; $f(x,y) = f_1(x)\, f_1(y)$

Bu diğer dağılımlarda geçerli değildir.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\hat{x}^2 - 2\rho \hat{x}\hat{y} + \hat{y}^2 \right] \right\}$$

$\hat{x} = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ $\quad \hat{y} = \frac{y - m_y}{\sigma_y}$ $\quad \rho = 0 \Rightarrow$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\hat{x}^2 + \hat{y}^2 \right] \right\} = f_1(x)\, f_1(y) \Rightarrow$$

istatistiksel bağımsız

Çok Değişkenin İstatistiksel Ortalamaları

$$E\{g(x,y,z)\} = \iiint g(x,y,z)\, f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

— x, y, z 'nin herhangi bir fonksiyonunun ortalama değeri —

$$E[x^i y^j] = \mu^{ij} = \iint x^i y^j f(x,y)\, dx\, dy$$ çapraz ilintiler

Birleşik momentler

$$\mu_{ij} = E[(x-m_x)^i (y-m_y)^j] = \iint (x-m_x)^i (y-m_y)^j f(x,y)\, dx\, dy$$

$E[xy] = \mu^{11}$ x ve y arasındaki çapraz ilinti

Eğer x & y istatistiksel bağımsız ise $f(x,y) = f(x) f(y)$

$$E[xy] = \iint x y\, f(x,y)\, dx\, dy = \int x f(x)\, dx \int y f(y)\, dy = E[x]\, E[y]$$

$\mu_{11} = E[(x-m_x)^2 (y-m_y)^2]$: x ve y arasındaki çapraz kovaryans

$\mu_{20} = \sigma_x^2$, $\mu_{02} = \sigma_y^2$

$$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\text{Çapraz kovaryans}}{\text{Standart sapmalar}}$$: korelasyon katsayısı

Ödev :

1) Herhangi iki istatistiksel bağımsız rasgele değişken x, y ilintisizdir; $\rho_{xy} = 0$. İspatlayınız.

2) Herhangi iki ilintisiz Gauss rasgele değişken x, y istatistiksel bağımsızdır ($f(x,y) = f(x) f(y)$), gösteriniz.

3) 2 Gauss rasgele değişkenin kor. sabiti ρ_{xy}, birleşik pdf teki ρ sabitine eşittir, gösteriniz.

8 sayfa
200.000

OLASILIK 4. not

Aydın Akan

Rasgele Vektörler

n rasgele değişkenden oluşan $\underset{\sim}{x}$ vektörüne, rasgele vektör denir. Bu durumda $\underset{\sim}{x}$ vektörünün tüm elemanları arasındaki birleşik pdf'den bahsedebiliriz.

$$\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(\underset{\sim}{x}) \quad \text{birleşik olasılık yoğ.}$$

$$\underset{\sim}{m}_x = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad \text{ortalama vek.}$$

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall \underset{\sim}{x}$ pozitif

2) $\underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x} = 1$ altındaki toplam hacim = kesin olay

3) $\underbrace{\int \cdots \int}_{n-2} f(\underset{\sim}{x})\, dx_3\, dx_4 \dots dx_n = f(x_1, x_2)$ marginal pdf

$$E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)] = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(\underset{\sim}{x})(x_i - m_i)(x_j - m_j)\, d\underset{\sim}{x}$$

$$= \iint (x_i - m_i)(x_j - m_j) \underbrace{f(x_i, x_j)}_{\text{marginal}} dx_i\, dx_j = r_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

çapraz kovaryans $r_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \Rightarrow$

i. eleman ile j. eleman arasındaki korelasyon katsayısı

$\rho_{ij} = \dfrac{r_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ olarak tanımlanır. Böylece tüm $x_i - x_j$ çiftleri arasındaki çapraz ilişki hesaplanabilir. $[r_{ij}]_{n \times n}$ matrisine $\underset{\sim}{x}$ rasgele vektörünün kovaryans matrisi denir.

Örnek: n elemanlı $\underset{\sim}{x}$ rasgele vektörü Gauss dağılıma sahip

$$f(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_x)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{m}_x)^T C_x^{-1} (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{m}_x) \right\}$$

C_x: kovaryans matrisi $\quad \underset{\sim}{m}_x$: mean vektörü

$$n=2 \Rightarrow C_x = \begin{bmatrix} \overbrace{\underbrace{\rho_{11}}_{1}\sigma_1^2}^{r_{11}} & \overbrace{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}^{r_{12}} \\ \underbrace{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}_{r_{21}=r_{12}} & \underbrace{\rho_{22}}_{1}\sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det C_x = (1-\rho_{12}^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 \qquad C_x^{-1} = \frac{1}{1-\rho_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

kullanılarak 2 değişkenli Gauss pdf elde edilebilir.

—o—

Tanım:
$\underset{\sim}{X}$ rasgele vektörünün tüm elemanlarının birbiri ile istatistiksel bağımsız olması; $f(\underset{\sim}{x}) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots f(x_n)$ özelliğini sağlaması demektir. Bu durumda tüm x_i elemanları birbiri ile ilintisizdir, yani çapraz kov.

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \sigma_i^2 & i = j \end{cases}$$ buna göre kovaryans matrisi C_x

$$C_x = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots \; \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & \\ & 1/\sigma_2^2 & \\ & & \ddots \; 1/\sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Eğer $\underset{\sim}{X}$ elemanları ilintisiz olan bir Gauss rasgele vektör ise, bu durumda tüm x_i, x_j çiftleri istatistiksel bağımsızdır; $f(\underset{\sim}{x}) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$

<u>Tanım</u>: $\underset{\sim}{X}$ ve $\underset{\sim}{y}$ rasgele vektörleri için eğer $\underset{\sim}{z} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X} \\ \hline \underset{\sim}{y} \end{bmatrix}$ genişletilmiş vektörünün pdf'i: $f(\underset{\sim}{z}) = f(\underset{\sim}{x})f(\underset{\sim}{y}) \Rightarrow$ $\underset{\sim}{x}$ ve $\underset{\sim}{y}$ istatistiksel bağımsızdır. Bu durumda

$E\{(x_i-m_i)(y_j-m_j)\} = 0 \quad \forall i,j$, Tüm $x_i - y_j$ ilintisizdir.

Ayrıca eğer $\underset{\sim}{x}$ ve $\underset{\sim}{y}$ ilintisiz <u>Gauss</u> rasgele vektörler ise ($Cov(x_i, y_j) = 0 \quad \forall i,j$) $\Rightarrow$ $\underset{\sim}{x}$ ve $\underset{\sim}{y}$ istatistiksel bağımsız vektörlerdir; $f(\underset{\sim}{z}) = f(\underset{\sim}{x})f(\underset{\sim}{y})$

2

Yani $R_z = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\sigma_1^2 & & \\ & R_x & \\ & & \sigma_n^2\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & R_y \end{array}\right] \Rightarrow R_z^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R_x^{-1} & 0 \\ \hline 0 & R_y^{-1} \end{array}\right]$

ve $f(\underset{\sim}{z}) = f(\underset{\sim}{x}) \cdot f(\underset{\sim}{y})$

— Büyük Sayıların Zayıf Kanunu —

$x_1, x_2, \dots x_n$ istatistiksel bağımsız rasgele değişkenler olsun.

$E[x_i] = \mu$ ve $E[(x_i - \mu)^2] = \sigma^2 \quad \forall i$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ aritmetik ortalama $\Rightarrow$

$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mu$ (aritmetik ortalamanın istatistik ortalaması x_i' nin istatistik ortalamasına eşit)

$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum x_i}{n} = \mu$

$Var\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$ (aritmetik ortalamanın varyansı, istatistik ortalamanın varyansı/n)

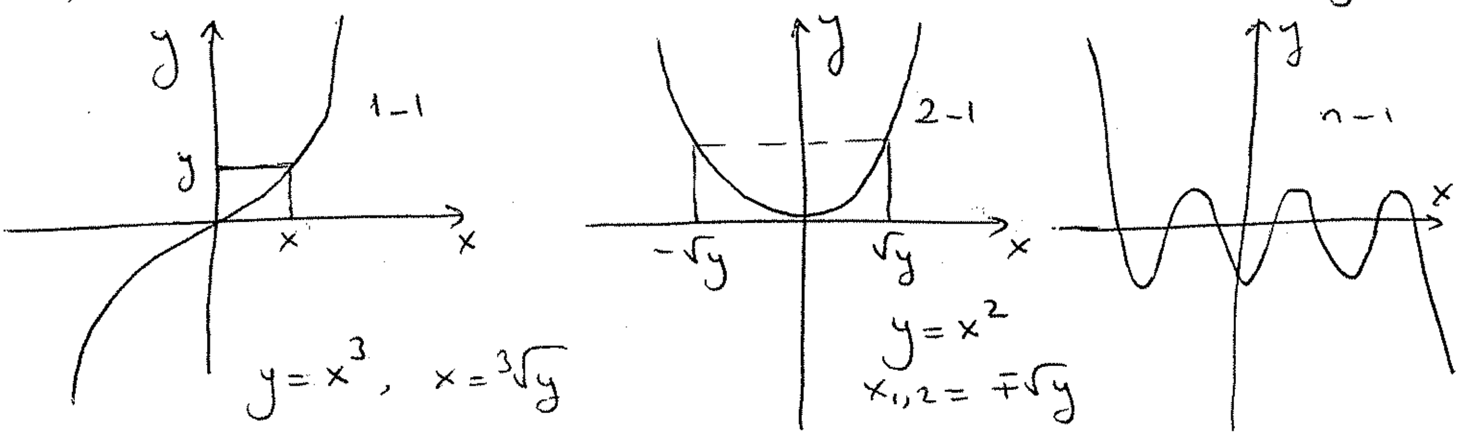
Dolayısı ile yeteri kadar sayıda örnek varsa, bu örneklerin aritmetik ortalaması tek bir örneğin istatistiksel ortalamasına yakınsar. Yani Expected değer yerine basit aritmetik ortalama kullanılabilir. Ortalamadan sapma miktarı ise $Var\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$ yani azalacaktır.

— Rasgele Değişkenlerin Fonksiyonu —

x rasgele değişkeninin $y=h(x)$ şeklinde bir fonksiyonu verilsin ve $f(x)$ pdf biliniyor olsun. Bu durumda y de bir rasgele değişkendir ve pdf'i bulunabilir.

a) Tek rasgele değişken $y=h(x)$, $f(x)$ veriliyor

1) Direkt yöntem: $F(y)=P\{h[y]\leq y\} \Rightarrow f(y)=\frac{\partial}{\partial y}F(y)$



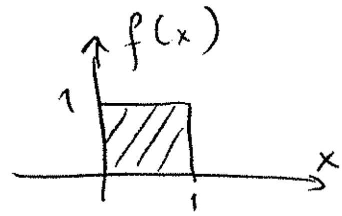
$y=x^3$, $x=\sqrt[3]{y}$

$y=x^2$
$x_{1,2}=\mp\sqrt{y}$

i) 1-1 direkt yöntem

$$F(y)=P\{X(\omega)\leq \underbrace{h^{-1}(y)}_{x}\}=\int_{-\infty}^{h^{-1}(y)} f(x)\,dx$$

<u>Örnek</u>: $y=x^3$ $\quad f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{dışında}\end{cases}$



$h^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}=x$

$$F(y)=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}} dx=\sqrt[3]{y} \qquad 0\leq y\leq 1$$

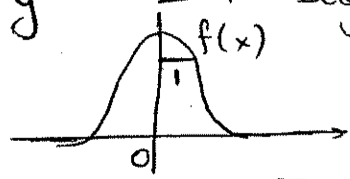
$$F(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \sqrt[3]{y} & 0\leq y\leq 1\\ 1 & y>1\end{cases} \Rightarrow f(y)=\frac{\partial F(y)}{\partial y}=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{y^{-2/3}}{3} & 0\leq y\leq 1\\ 0 & y>1\end{cases}$$

4

ii) n–1 Direkt yöntem: $y = h(x)$ $x = h^{-1}(y)$

Örnek: $y = x^2$ $h^{-1}(y) = x = \sqrt{y}$ 2–1 bağıntı

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad : N(0,1)$$

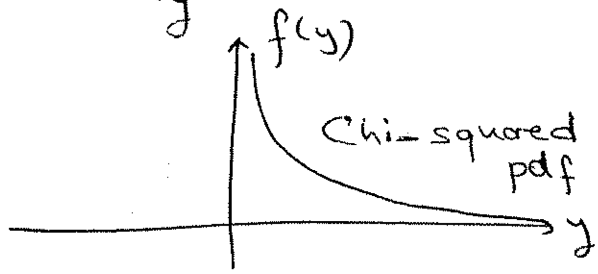


$$F(y) = P\{h[X(\omega)] \leq y\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} f(x)\,dx$$

$$= 2\left[F_x(\sqrt{y}) - F_x(0)\right]$$

$$f(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y} = 2 f_x(\sqrt{y}) \underbrace{\frac{\partial \sqrt{y}}{\partial y}}_{1/\sqrt{y}} = \frac{f_x(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} & y \geq 0 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases}$$



2) Fonksiyonel ilişkiler —

n–1 bağıntı durumu için: $y = h(x)$ $y_0 = h(x_0)$

$$f(y) = \left.\frac{n\, f(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\right|_{X = h^{-1}(y)} = \left.\frac{n\, f(x)}{|h'(x)|}\right|_{X = h^{-1}(y)}$$

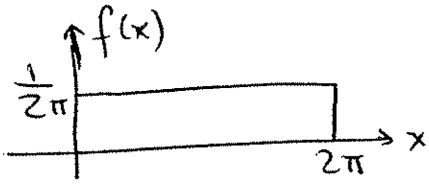
Örnek: $y = x^2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{y}$ (2–1), $h'(x) = 2x$

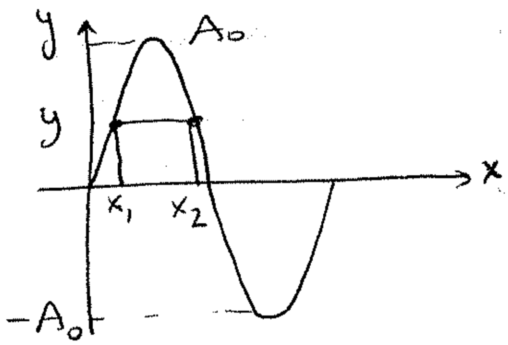
$$f(y) = \left.\frac{2\, f(x)}{|2x|}\right|_{x = h^{-1}(y) = \sqrt{y}} = \frac{\cancel{2}\, f(\sqrt{y})}{(\cancel{2}\sqrt{y})} = \frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$$

Direkt yöntem ile aynı sonuç fonksiyonel ilişkiler kullanılarak da bulunmuş oldu.

Örnek: $y = A_0 \sin x$, A_0 sabit $\quad x \sim$ uniform değilim

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & \text{dışında} \end{cases}$$



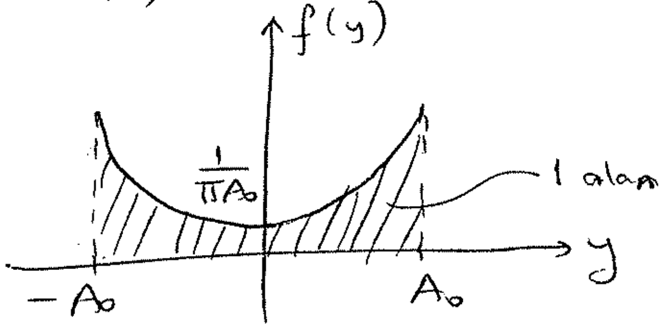


$|y| \le A_0 \quad$ 2-1 bağıntı

$$f(y) = \left.\frac{2\, f(x)}{|h'(x)|}\right|_{x = h^{-1}(y)} = \left.\frac{2\, f(x)}{|A_0 \cos x|}\right|_{x = h^{-1}(y)}$$

$$|h'(x)| = \sqrt{A_0^2 \cos^2 x} = \sqrt{A_0^2 (1 - \sin^2 x)} = \sqrt{A_0^2 - y^2}$$

$$f(y) = \left.\frac{2\, f(x)}{\sqrt{A_0^2 - y^2}}\right|_{x = \arcsin\left(\frac{y}{A_0}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{A_0^2 - y^2}} & -A_0 < y < A_0 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases}$$

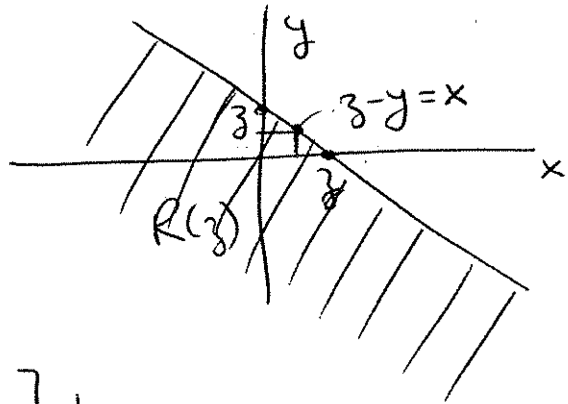


b) Çok Değişkenli fonksiyonlar: $\quad y = h(x_1, x_2, \dots x_n)$

1) Direkt yöntem: (1-1 veya n-1 bağıntılar için)

$y = h(x_1, x_2, \dots x_n) \qquad R(y) = \{ \underset{\sim}{x}(y) \; / \; h[\underset{\sim}{x}(\omega)] \le y \}$

$$F(y) = \iint\cdots\int_{R(y)} f(\underset{\sim}{x})\, d\underset{\sim}{x} \quad \text{ve} \quad f(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y}$$



Örnek: $z = x + y$

$$F_z(z) = \iint_{R(z)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx\right]dy$$

Eğer x ve y istatistiksel bağımsız rasgele değişkenler ise

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{z-y} f_x(x)\,dx\right]}_{F_x(z-y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_x(z-y)\,f_y(y)\,dy$$

$$f_z(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)\,f_y(y)\,dy = f_x(x) * f_y(y)$$

* n istatistiksel bağımsız rasgele değişkenin pdf'i onların pdf'lerinin konvolüsyonuna eşittir. $n \to \infty$ sonuç Gauss pdf'e gider.

2) Fonksiyonel ilişkiler: (sadece 1-1 bağıntılar için)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, x_2 \ldots x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= h_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(\underset{\sim}{y}) = \left.\frac{f(\underset{\sim}{x})}{J\left(\frac{\underset{\sim}{y}}{\underset{\sim}{x}}\right)}\right|_{\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{h}^{-1}(\underset{\sim}{y})}$$

J hacimsel diferansiyel olup Jakobiyen denir.

$$J\left(\frac{y_1, y_2 \cdots y_n}{x_1, x_2, \ldots x_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

kısmi türevler matrisinin determinantı

Örnek: $z = x+y$, $v = y$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} \quad f(x,y) \rightarrow f(z,v) = ?$

$$J\left(\frac{z,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(z,v) = \left.\frac{f(x,y)}{1}\right|_{\substack{y=v \\ x=z-v}} = f_{xy}(z-v, v) \quad \text{birleşik pdf}$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z,v)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(z-v, v)\, dv \text{ , marginal}$$

Örnek: A, $B = \sin x$ rasgele değişkenler, x uniform$(0, 2\pi)$

B'nin pdf'ini daha önce $f_B(b) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-B^2}}$ olarak bulduk

$$\left.\begin{aligned} v &= AB \\ u &= A \end{aligned}\right\} f(u,v) = ? \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} A &= u \\ B &= \frac{v}{A} = \frac{v}{u} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} A \text{ ve } B \\ \text{istatistiksel bağımsız} \end{matrix}$$

$$f(u,v) = \frac{f(A,B)}{J\left(\frac{u,v}{A,B}\right)} = \frac{f_A(u)\, f_B\left(\frac{v}{u}\right)}{J}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial A} & \frac{\partial u}{\partial B} \\ \frac{\partial v}{\partial A} & \frac{\partial v}{\partial B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{vmatrix} = A = u \qquad f_B\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}} \quad \left|\frac{v}{u}\right| \leq 1$$

$$f(u,v) = \frac{1}{|u|} f_A(u)\, f_B\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{1}{|u|} f_A(u) \frac{u}{\pi\sqrt{u^2-v^2}}$$

$$f_v(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_A(u)}{\cancel{|u|}} \frac{\cancel{u}}{\pi\sqrt{u^2-v^2}}\, du \qquad |v| \leq |u|$$

$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_A(u)}{|u|} \frac{u}{\pi\sqrt{u^2-v^2}}\, dv \qquad |v| \leq |u|$$

OLASILIK 5. Nöt

— Karakteristik (Moment Üreten) Fonksiyon —

Bir x sürekli rasgele değişkeni için, $M_x(jv)$ karakteristik fonksiyonu

$$M_x(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{jvx}\, dx = \mathcal{F}[f(x)] \quad (\text{pdf 'in Fourier dönüşümü})$$
$$= E[e^{jvx}] \quad (e^{jvx} \text{ in ortalama değeri})$$

iki biçimde yorumlanabilir

i) $f(x)$, Pdf 'in Fourier dönüşümüdür,

ii) e^{jvx} üstel fonksiyonunun mean değeridir.

$$|M_x(jv)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\, e^{jvx}\, dx| \Rightarrow |M_x(jv)| \leq 1$$

$$M_x(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad M_x(jv) \leq M_x(j0) = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_x(jv)\, e^{-jvx}\, dx$$

Teorem: $z = \sum_{i=1}^{k} x_i$, x_i istatistiksel bağımsız rd.

$$\Rightarrow \quad M_z(jv) = \prod_{i=1}^{k} M_{x_i}(jv) \quad \text{karakteristik fonksiyonların çarpımı}$$

$\Rightarrow$ x_1 ve x_2 rasgele değişkenlerinin birleşik pdf'i: $f(x_1, x_2)$

$$M_{x_1x_2}(jv_1, jv_2) = E[e^{jv_1x_1 + jv_2x_2}] = \iint f(x_1x_2)\, e^{j(v_1x_1 + v_2x_2)}\, dx_1 dx_2$$

Tek rasgele değişken, veya çoklu birleşik rasgele değişken durumunda karakteristik fonksiyondan, momentler bulunabilir

11 sayfa 300.000 . 4

Karakteristik Fonksiyondan Moment Bulunması

$M_x(jv)$'nin v değişkenine göre n. derece türevi;

$$\frac{\partial^n M_x(jv)}{\partial v^n} = j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{jvx} f(x)\, dx$$

j^n terimini ve e^{jvx} terimini elimine edersek geriye $E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$ kalır. O halde x rasgele değişkeninin n. derece momenti

$$(-j)^n \left.\frac{\partial^n M_x(jv)}{\partial v^n}\right|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx = E[x^n]$$

Karakteristik fonksiyonun türevlerini alarak x'in momentleri hesaplanabilir.

Birleşik Momentler

$$\frac{\partial^{n+k} M_x(jv_1, jv_2)}{\partial v_1^n \, \partial v_2^k} = j^{n+k} \iint_{-\infty}^{\infty} x^n y^k e^{j(v_1 x + v_2 y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$(-j)^{n+k} \left.\frac{\partial^{n+k} M_x(jv_1, jv_2)}{\partial v_1^n \, \partial v_2^k}\right|_{v_1=v_2=0} = E[x^n y^k] \qquad n, k. \text{ moment}$$

<u>Örnek</u>: $x \sim N(m_x, \sigma_x^2)$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2}$

$$M_x(jv) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[\underbrace{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{x m_x}{\sigma_x} - \frac{m_x^2}{2\sigma_x^2} + jvx}_{[x-(m_x+jv\sigma_x^2)]^2 - 2jm v\sigma_x^2 + v^2\sigma_x^4}\Big]\, dx$$

$$= e^{(jvm_x - \sigma_x^2 v^2/2)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x-(m+jv\sigma_x^2)\right]^2\right\} dx}$$

2

$M_x(jv) = \exp\{ jvm_x - \sigma_x^2 v^2/2 \}$ $\quad m_x = 0$ olsun.

$$M_x(jv) = \exp\{ -\sigma_x^2 v^2/2 \} = 1 - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\sigma_x^2 v^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!}(\quad) + \cdots$$

Örnek: 0 ortalamalı x Gauss rasgele değişkeni için $\mu^1, \mu^2, \mu^3, \mu^4$ bulunuz.

$$M_x(jv) = e^{-\sigma_x^2 v^2/2}$$

$$E[x] = \mu^1 = (-j)^1 \left.\frac{\partial M_x(jv)}{\partial v}\right|_{v=0} = 0 \qquad \left.\underbrace{(-j)(-\sigma_x^2 v)\, e^{-\sigma_x^2 v^2/2}}\right|_{v=0} = 0$$

$$E[x^2] = \mu^2 = (-j)^2 \left.\frac{\partial^2 M_x(jv)}{\partial v^2}\right|_{v=0} = \sigma_x^2$$

$$E[x^3] = \mu^3 = (-j)^3 \left.\frac{\partial^3 M_x(jv)}{\partial v^3}\right|_{v=0} = 0 \qquad E[x^n] = 0 \quad n, \text{ tek}$$

$$E[x^4] = \mu^4 = 3\sigma_x^4 \qquad E[x^6] = 15\sigma_x^6$$

$$E[x^n] = \frac{n!\,\sigma_x^n}{\frac{n}{2}!\; 2^{n/2}} \quad , n \text{ çift}$$

Genel Karakteristik Fonksiyon

$\underset{\sim}{x} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^T$ rasgele değişkenlerin oluşturduğu bir rasgele vektör olsun. $\underset{\sim}{x}$'in genel karakteristik fonksiyonu

$$M_x(j\underset{\sim}{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\underset{\sim}{x})\, e^{j\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{x}}\, d\underset{\sim}{x} \qquad \underset{\sim}{u} = [u_1 \; u_2 \; \ldots \; u_n]^T$$

Example: $f_n(\underset{\sim}{x}) = \left(1 \Big/ \sqrt{(2\pi)^n |K_x|}\right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{(\underset{\sim}{x} - \bar{\underset{\sim}{x}})^T}_{\underset{\sim}{t}^T} K_x^{-1} \underbrace{(\underset{\sim}{x} - \bar{\underset{\sim}{x}})}_{\underset{\sim}{t}} \right\}$

K_x : pozitif tanımlı simetrik kovaryans matrisi, $\bar{\underset{\sim}{x}}$ ortalama

$$M_{\underset{\sim}{x}}(j\underset{\sim}{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{-n/2}\sqrt{|K_x|}} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \exp\{-\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T K^{-1}\underset{\sim}{t}\}\, e^{j\underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{x}}\, d\underset{\sim}{x}$$

vektörün elemanları olan x_i istatistiksel bağımsız olanlar varyansları eşit olsun.

$$K_x = \begin{bmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{bmatrix} \qquad M_{\underset{\sim}{x}}(j\underset{\sim}{u}) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(ju_i)$$

<u>Not</u>: Gauss rasgele değişkenin lineer fonksiyonları da Gauss rasgele değişken verir.

— Genel Karakteristik Fonksiyondan Moment Bulunması —

$$M_{\underset{\sim}{x}}(j\underset{\sim}{u}) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f_n(\underset{\sim}{x})\, e^{j\sum_i u_i x_i}\, d\underset{\sim}{x}$$

$$\frac{\partial^m M_x(j\underset{\sim}{u})}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots \partial u_m} = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int (j)^m x_1 x_2 \cdots x_m f_n(\underset{\sim}{x})\, e^{j\sum_i x_i u_i}\, d\underset{\sim}{x}$$

$$E[x_1 x_2 \cdots x_m] = (-j)^m \left.\frac{\partial^m M_x(j\underset{\sim}{u})}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots \partial u_m}\right|_{\underset{\sim}{u}=0}$$

<u>Örnek</u>: Sıfır ortalamalı $\underset{\sim}{x}$ rasgele vektörü $\underset{\sim}{m}_x = \underset{\sim}{0}$

$$M_{\underset{\sim}{x}}(j\underset{\sim}{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_j\sum_k u_j r_{jk} u_k\right\}$$

$$\frac{\partial M_x(j\underset{\sim}{u})}{\partial u_1} = -\sum_j r_{j1} \underline{u_j}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_j\sum_k u_j r_{jk} u_k}\Bigg|_{\underset{\sim}{u}=0} = 0 = E[x_1]$$

$$\frac{\partial^2 M_x(j\underset{\sim}{u})}{\partial u_1 \partial u_2} = -r_{21}\, e^{[\ldots]} + \sum_j\sum_k r_{j1} r_{k2} \underline{u_j u_k}\, e^{[\ldots]}$$

$$E[x_1 x_2] = (-j)^2 \left.\frac{\partial^2 M_x(j\underset{\sim}{u})}{\partial u_1 \partial u_2}\right|_{u=0} = r_{21} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \checkmark$$

$$E[x_1 x_2 x_3] = (-j)^3 \left. \frac{\partial^3 M_{\underline{x}}(j\underline{u})}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} \right|_{\underline{u}=0} = 0$$

$$E[x_1 x_2 x_3 x_4] = (-j)^4 \left. \frac{\partial^4 M_{\underline{x}}(j\underline{u})}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3 \partial u_4} \right|_{\underline{u}=0} = r_{21} r_{43} + r_{31} r_{42} + r_{41} r_{3\ldots}$$

$$E[x_1 x_2 \ldots x_{2m}] = \sum_{\text{tüm çiftler}} \prod_{j \neq k} \underbrace{E[x_i x_j]}_{r_{ij}}$$ çift dere... moment

çift sayısı $\frac{(2m)!}{2^m m!}$ ve

$E[x_1 x_2 \ldots x_{2m+1}] = 0$ tek dereceli kuvvetler.

1) $E[x_1 x_1 x_1 x_1] = E[x_1^4] = E[x_1 x_1] E[x_1 x_1] + E[x_1 x_1] E[x_1 x_1] + E[x_1 x_1] E[x_1 x_1]$

$2m = 4$ 3 çift

$= r_{11}^2 + r_{11}^2 + r_{11}^2 = 3 r_{11}^2 = 3\sigma_{x_1}^4$

$(r_{11} = \rho_{11} \sigma_{x_1} \sigma_{x_1} = \sigma_{x_1}^2)$, $\rho_{11} = 1$

2) $E[x_1^6] = E[x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 x_1] = 15\, E[x_1^2] E[x_1^2] E[x_1^2]$

$2m = 6$ 15 çift $= 15\, r_{11}^3 = 15\, \sigma_{x_1}^6$

3) $E[x_1^2] = E[x_1 x_1] = r_{11} = \rho_{11} \sigma_{x_1} \sigma_{x_1} = \sigma_{x_1}^2$

$2m = 1$ çift $= 1$

4) $E[x_1^2 x_2] = 0$ tek dereceli moment

5) $E[x_1^2 x_2^2] = E[x_1 x_1 x_2 x_2] = E[x_1 x_1] E[x_2 x_2] + E[x_1 x_2] E[x_1 x_2] + E[x_1 x_2] E[x_1 x_2]$

$2m = 4$ 3 çift 4

$= r_{11} r_{22} + 2 r_{12}^2$

$= \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 + 2 \rho_{12}^2 \sigma_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2$

6) $E[x_1 x_2^2 x_3^3] = ?$

$2m = 6$

Merkezi Limit Teoremi

$$z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} y_i \quad , \quad \{y_i\}$$ istatistiksel bağımsız, sıfır ortalamalı, aynı olasılık dağılım fonksiyonuna sahip

$\Rightarrow$ $N \Rightarrow \infty \rightarrow z \sim N$ Gauss rasgele değişkene yakınsar

$$\lim_{N \to \infty} F_z(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_y^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right\} dy$$

ve $M_z(jv) = \prod_{i=1}^{N} M_{y_i}\left(\frac{jv}{\sqrt{N}}\right) = \left[M_{y_i}\left(\frac{jv}{\sqrt{N}}\right)\right]^N$

İspat:

$$M_{y_i}(jv) = E\left[e^{jvy_i}\right] = E\left[1 + jvy + \frac{1}{2!}(jvy_i)^2 + \frac{1}{3!}(\dots)^3 \dots\right]$$

$$= 1 + jv\overline{y_i} + \frac{(jv)^2}{2!}\overline{y_i^2} + \underbrace{\frac{(jv)^3}{3!}\overline{y_i^3} + \dots}_{\mathcal{O}(v^3)}$$

$y_i = 0$ olsun $\Rightarrow \overline{y_i^2} = \sigma_y^2$

$$M_{y_i}(jv) = 1 + \frac{(jv)^2}{2!}\sigma_y^2 + \mathcal{O}(v^3)$$

$$M_z = \left[M_{y_i}\left(\frac{jv}{\sqrt{N}}\right)\right]^N$$

$$\ln\left(M_z(jv)\right) = N \ln\left[M_{y_i}\left(\frac{jv}{\sqrt{N}}\right)\right]$$

$$= N \ln\left\{1 + \frac{v^2}{N}\frac{\sigma_{y_i}^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{v}{\sqrt{N}}\right)^3\right\}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$$

N yeterince büyük ise,

$$\ln\left(M_z(jv)\right) = N\left[-\frac{v^2}{N}\frac{\sigma_{y_i}^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{v}{\sqrt{N}}\right)^3\right]$$

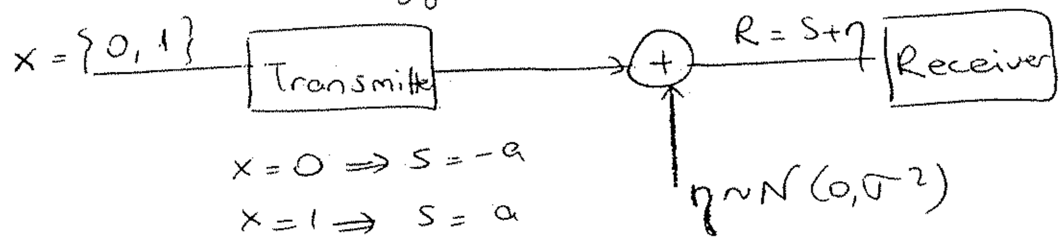
$$\lim_{N \to \infty} \ln\left(M_z(jv)\right) = -v^2 \sigma_{y_i}^2/2 \Rightarrow M_z(jv) = e^{-v^2\sigma_y^2/2}$$

$\Rightarrow$ z Gauss rasgele değişken

Örnek: Binary dağılım: $P(x) = \begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2 & x=1 \end{cases}$

$$m_x = \sum_i x_i P_i = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Örnek: İletişim Uygulaması (Hata Olasılık Hesabı)



— $x \in \{0, 1\}$ binary random variable representing one bit input. 0 & 1 are equally likely ($p_i = \frac{1}{2}$, $i = 0, 1$)

— η is a Gaussian random variable representing the additive noise with zero mean and σ^2 variance.

— $R = S + \eta$ $R \geq 0 \Rightarrow Y = 1$ $Y \in \{0, 1\}$
$R < 0 \Rightarrow Y = 0$

— bit error calculation

$$P_{bit} = \frac{1}{2} \text{Prob}[Y=1 \setminus x=0] + \frac{1}{2} \text{Prob}[Y=0 \setminus x=1]$$

$$= \text{Prob}[Y=1 \setminus x=0] = \text{Prob}[R \geq 0 \setminus x=0] = \text{Prob}[S+\eta \geq 0 \setminus x=0]$$

$$= \text{Prob}[-a+\eta \geq 0 \setminus S=-a]$$

$$= \text{Prob}[-a+\eta \geq 0]$$

$$= \text{Prob}[\eta \geq a]$$

— Properties of the mean —

1) $E[cx] = c\,E[x]$ c any constant
2) $E[c] = c$
3) $E[c+x] = c + E[x]$

— Properties of the variance —

1) $\text{Var}(cx) = c^2 \sigma_x^2$
2) $\text{Var}(c) = 0$
3) $\text{Var}(x+c) = \text{Var}(x)$

— Characteristic Function —

$$\Psi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, e^{j\omega x}\, dx \quad \text{(Fourier transform of } x\text{)}$$

Higher order moments of a r.v. can be easily calculate from the characteristic function $\Psi_x(\omega)$ by

$$\mu_x^r = \frac{1}{j^r} \frac{d^r}{d\omega^r} \Psi(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

— Chebychew Inequality —

Let x be a r.v with mean m_x and variance σ_x^2
Then for any δ

$$P(|x - m_x| \geq \delta) \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}$$

(measures how close the r.v. to the mean)

The variance of a r.v. determines how the r.v. lies around its mean.

— Rayleigh Distribution —

Let $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ where x_1 and x_2 are Gaussian r.v.'s with 0 mean and σ^2 variance. Then R is Rayleigh r.v. with pdf:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}$$

frequently used to model fading in Com. systems.

— Central Limit Theorem —

Let $x_1, x_2, \ldots x_n$ be a set of statistically indep. r.v's

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

as $n \to \infty$ y will approach to a Gaussian r.v.

In practice $N = 10$ is usually enough to generate a Gauss r.v.

Random Process : Rasgele Süreç

Suppose that to every possible outcome $\omega \in S$, we assign a function of time according to some rule:

$$x(t;\omega) \quad t \in I$$

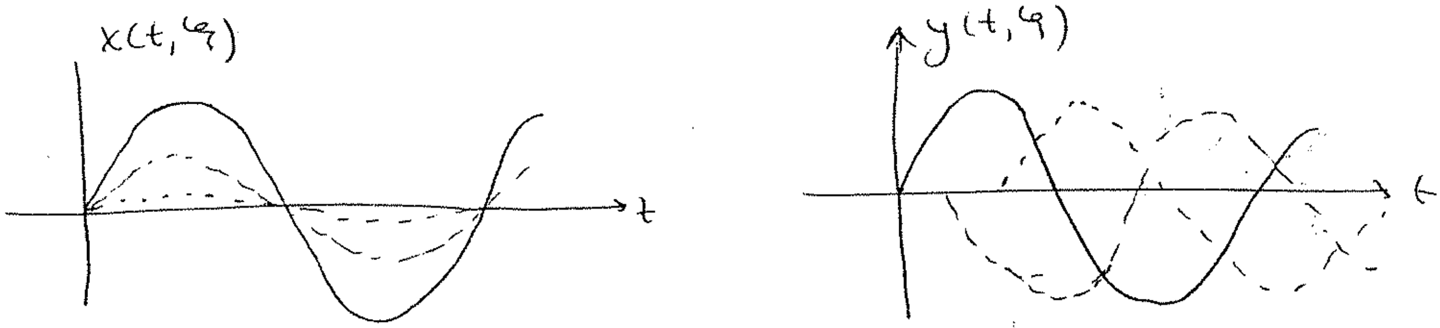
<u>Examples</u>: let ξ be selected randomly from the interval $[-1,1]$. Define a cont.-time random process by

$$x(t;\xi) = \xi \cos(2\pi t) \quad -\infty < t < \infty$$

The realization of this random process is sinusoids with random amplitudes. Let ξ be selected randomly from interval $[-\pi,\pi]$ and

$$y(t;\xi) = \cos(2\pi t + \xi)$$ sinusoids with random phase

— A random process is called discrete-time if the index I is a countable set. $\{x(n)\}$; $n \in \mathbb{Z}$



Joint Distribution of Samples of Random Process

Let $x_1, x_2, \dots x_k$ be the k r.v.'s obtained by sampling the random process $x(t,\xi)$ at times $t_1, t_2, \dots t_k$. i.e., $x_1 = x(t_1,\xi)$, $x_2 = x(t_2,\xi)$ ---

$$x_k = x(t_k,\xi)$$

The joint behaviour of the random process at these time instants is specified by the joint distri. function.

$F(x_1, x_2 \ldots x_k) = P[X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2,\ \ldots\ X_k \leq x_k]$ CDF

$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \dfrac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} F(x_1, x_2 \ldots x_k)$ PDF

— The mean $m_x(t)$ of a random process is

$$M_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_{x(t)}(x)\, dx$$ where

$f_{x(t)}(x)$ is the joint pdf of the random process.

— The autocorrelation function of a random process $x(t)$

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)\ x(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\, x_2\, f_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

— The autocovariance function of the process,

$$C_x(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))]$$
$$= R_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)\, m_x(t_2)$$

— The variance of $x(t)$

$$Var[x(t)] = E[(x(t) - m_x(t))^2] = C_x(t, t)$$

— The cross-correlation between $x(t)$ and $y(t)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1)\ y(t_2)]$$

Processes $x(t)$ and $y(t)$ are called (orthogonal / uncorrelated) if

$R_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall\ t_1, t_2$.

— The cross-covariance

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - m_x(t_1))(y(t_2) - m_y(t_2))]$$

$x(t)$ and $y(t)$ are called uncorrelated if

$C_{xy}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall\ t_1, t_2$

<u>Note</u>: If the mean of $x(t)$ and $y(t)$ are $0\ \forall t$, then correlation and covariance are the same.

– Stationary Random Processes — Durağan Rasgele Süreçler

A random process is called strictly stationary if the <u>statistics</u> of the process does not change with time. i.e., The pdf $f_{X(t)}(x)$ is constant for all times. A partial characterization of stationarity is given as follows:

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x \quad \forall t & \text{(stat. to first order)} \\ C_x(t_1,t_2) = C_x(t_2-t_1) \quad \forall t_1,t_2 & \text{(stat. to second order)} \end{cases}$$

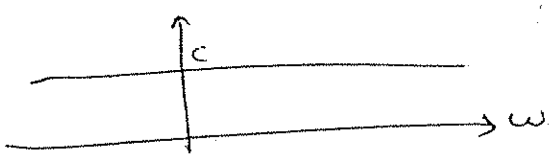
If both 1st and 2^{nd} order stationary $\Longrightarrow$ Wide Sense Stat.

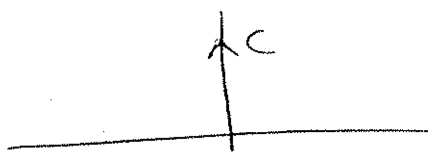
$$R_x(t_1,t_2) = R_x(t_2-t_1) = R_x(\tau)$$

_ White Process —

A process is called white if it has a flat PSD

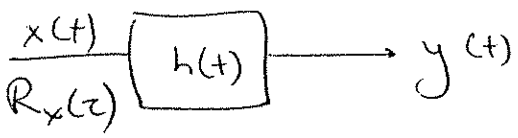
$$S_x(\omega) = c \quad \longleftrightarrow \quad R_x(\tau) = c\,\delta(\tau)$$





_ Ergodic Processes —

A random process is called <u>ergodic</u> if the time averages converge to the statistical averages. This property helps us calculate statistical averages (moments) using only one realization of the process and by time averaging over that single realization.



$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$S_y(f) = S_x(f)\, H(f)\, H^*(f) = S_x(f)\, |H(f)|^2$$